Решения на задачи за изпит по НМ

Камен Димитров Младенов, 0MI0800028

14 Май 2025

Първо ще подготвим таблицата на орбиталните елементи. Уебсайтът на NASA [1] предоставя следните константи за началото на епохата (1 Януари 2000, 00:00 часа):

	a au, au/Cy	e rad, rad/Cy	I deg, deg/Cy	L deg, deg/Cy	long.peri. deg, deg/Cy	long.node. deg, deg/Cy
Mercury	0.38709927	0.20563593	7.00497902	252.25032350	77.45779628	48.33076593
	0.00000037	0.00001906	-0.00594749	149472.67411175	0.16047689	-0.12534081
Venus	0.72333566	0.00677672	3.39467605	181.97909950	131.60246718	76.67984255
	0.00000390	-0.00004107	-0.00078890	58517.81538729	0.00268329	-0.27769418
EM Bary	1.00000261	0.01671123	-0.00001531	100.46457166	102.93768193	0.0
	0.00000562	-0.00004392	-0.01294668	35999.37244981	0.32327364	0.0
Mars	1.52371034	0.09339410	1.84969142	-4.55343205	-23.94362959	49.55953891
	0.00001847	0.00007882	-0.00813131	19140.30268499	0.44441088	-0.29257343
Jupiter	5.20288700	0.04838624	1.30439695	34.39644051	14.72847983	100.47390909
	-0.00011607	-0.00013253	-0.00183714	3034.74612775	0.21252668	0.20469106
Saturn	9.53667594	0.05386179	2.48599187	49.95424423	92.59887831	113.66242448
	-0.00125060	-0.00050991	0.00193609	1222.49362201	-0.41897216	-0.28867794
Uranus	19.18916464	0.04725744	0.77263783	313.23810451	170.95427630	74.01692503
	-0.00196176	-0.00004397	-0.00242939	428.48202785	0.40805281	0.04240589
Neptune	30.06992276	0.00859048	1.77004347	-55.12002969	44.96476227	131.78422574
	0.00026291	0.00005105	0.00035372	218.45945325	-0.32241464	-0.00508664

Всички колони със стойности спрямо градуси ще бъдат преобразувани спрямо радиани, използвайки формулата $\text{rad} = \text{deg} \cdot \frac{\pi}{180}$ (с точност до 8 знака след десетичния знак).

Ще сменим наименованията на елементите: a $\to$ a_{2000}, e $\to$ e_{2000}, I $\to$ i_{2000}, L $\to$ λ_{2000}, long.peri. $\to$ $\tilde{\omega}_{2000}$ и long.node. $\to$ θ_{2000}. Ще бележим измененията с Δ. Получаваме:

	$a_{2000}, \Delta a$ au, au/Cy	$e_{2000}, \Delta e$ rad, rad/Cy	$i_{2000}, \Delta i$ rad, rad/Cy	$\lambda_{2000}, \Delta\lambda$ rad, rad/Cy	$\tilde{\omega}_{2000}, \Delta\tilde{\omega}$ rad, rad/Cy	$\theta_{2000}, \Delta\theta$ rad, rad/Cy
Mercury	0.38709927	0.20563593	0.12225995	4.40259868	1.35189358	0.84353100
	0.00000037	0.00001906	-0.00010380	2608.79030501	0.00280085	-0.00218761
Venus	0.72333566	0.00677672	0.05924827	3.17613446	2.29689636	1.33831572
	0.00000390	-0.00004107	-0.00001377	1021.32854958	0.00004683	-0.00484668
EM Bary	1.00000261	0.01671123	-0.00000027	1.75343756	1.79660147	0.0
	0.00000562	-0.00004392	-0.00022596	628.30757790	0.00564219	0.0
Mars	1.52371034	0.09339410	0.03228321	-0.07947238	-0.41789517	0.86497713
	0.00001847	0.00007882	-0.00014192	334.06130168	0.00775643	-0.00510637
Jupiter	5.20288700	0.04838624	0.02276602	0.60033114	0.25706047	1.75360053
	-0.00011607	-0.00013253	-0.00003206	52.96631189	0.00370929	0.00357253
Saturn	9.53667594	0.05386179	0.04338874	0.87186604	1.61615531	1.98378354
	-0.00125060	-0.00050991	0.00003379	21.33653879	-0.00731244	-0.00503838
Uranus	19.18916464	0.04725744	0.01348507	5.46703627	2.98371499	1.29183904
	-0.00196176	-0.00004397	-0.00004240	7.47842217	0.00712187	0.00074012
Neptune	30.06992276	0.00859048	0.03089309	-0.96202600	0.78478315	2.30006864
	0.00026291	0.00005105	0.00000617	3.81283674	-0.00562720	-0.00008878

Без долен индекс и Δ ще обозначаваме величина след време t от началото на епохата. Тоест, обозначаваме $a = a_{2000} + t \cdot \Delta a, \quad e = e_{2000} + t \cdot \Delta e$, ...

Финално, ще изчислим рожденната ми дата във векове. Аз съм роден на 27 Април 2002 година. Това е 117-ят ден в годината, което е $\frac{117}{365.25} \approx 0.3203285421$ Юлиански години. Общо излиза 2.3203285421 Юлиански години след началото на епохата, което са $\frac{2.3203285421}{100} = 0.023203285421$ Юлиански века.

1. Решение Ще напишем програма на езика `R`, която намира координатите и скоростите на планетите в деня на моето раждане. Входните данни на програмата ще бъдат орбиталните елементи в началото на епохата и рожденната ми дата (в Юлиански векове от началото на епохата).

Дефинираме функция `atDay`, която пресмята новата стойност на величина след време t:

```
atDay <- function(epochConstant, rate, t) {
  epochConstant + t * rate
}
```

От теорема знаем, че векторът координат r и векторът скорост v се пресмятат чрез:

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a(\cos u - e) \\ a\sqrt{1-e^2}\sin u \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} -\sin u \\ \sqrt{1-e^2}\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \frac{an}{1 - e\cos u}$$

Където Q е матрицата на въртения около нулата:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos g & -\sin g & 0 \\ \sin g & \cos g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Дефинираме помощни функции `m3x3` и `p`. Първата приема редица елементи и ги преобразува в 3×3 матрица, втората изкарва подаденото на екрана, като всички числа са с 10 цифри прецизност:

```
m3x3 <- function(...) {
  matrix(c(...), nrow = 3, ncol = 3, byrow = TRUE)
}
p <- function(x) {
  formatC(x, format="f", digits = 10)
}
```

Дефинираме функция `Q`, която пресмята матрица на въртене по подадени стойности θ, i, g (операторът `%*%` умножава матрици и вектори):

```
Q <- function(theta, i, g) {
  m3x3(
    cos(theta), -sin(theta), 0,
    sin(theta),  cos(theta), 0,
             0,           0, 1
  ) %*% m3x3(
    1,      0,       0,
    0, cos(i), -sin(i),
    0, sin(i),  cos(i)
  ) %*% m3x3(
    cos(g), -sin(g), 0,
    sin(g),  cos(g), 0,
         0,       0, 1
  )
}
```

Дефинираме функция `coordinates`, която изчислява стойността на r вектора по горната формула:

```
coordinates <- function(theta, i, g, a, u, e) {
   Q(theta, i, g) %*% c(
    a * (cos(u) - e),
    a * sqrt(1 - e^2) * sin(u),
    0
  )
}
```

Дефинираме функция `speed`, която изчислява стойността на v вектора по горната формула:

```
speed <- function(theta, i, g, a, u, e, n) {
   Q(theta, i, g) %*% c(
    -sin(u),
    sqrt(1 - e^2) * cos(u),
    0
  ) * a * n / (1 - e * cos(u))
}
```

По дефиниция знаем, че $\tilde{\omega} = g + \theta$ и $\lambda = l + g + \theta = l + \tilde{\omega}$. То, можем да намерим стойностите на g и l чрез формулите:

$$g = \tilde{\omega} - \theta \qquad l = \lambda - \tilde{\omega}$$

Имплементираме ги във функции `g` и `l`:

```
g <- function(omega, theta) { omega - theta }
l <- function(lambda, omega) { lambda - omega }
```

Един от начините да дефинираме средното движение n е чрез средната аномалия l:

$$l = l_0 + n(t - t_0) \qquad n = \frac{l - l_0}{t - t_0}$$

В нашата задача, $l_0 = l_{2000} = \lambda_{2000} - \tilde{\omega}_{2000}$. Нека да зачетем t_0 за началото на епохата и t за време от това начало (във векове), тоест свеждаме $t - t_0$ до t. Тогава намираме, че n е изменението на средната аномалия l:

$$n = \frac{l - l_{2000}}{t} = \frac{(l_{2000} + t \cdot \Delta l) - l_{2000}}{t} = \frac{t \cdot \Delta l}{t} = \Delta l$$

Ще покажем, че изменението на средната аномалия е измението на λ минус изменението на $\tilde{\omega}$:

$$\Delta l = n = \frac{l - l_{2000}}{t} = \frac{(\lambda - \tilde{\omega}) - (\lambda_{2000} - \tilde{\omega}_{2000})}{t} = \frac{(\lambda_{2000} + t \cdot \Delta\lambda) - (\tilde{\omega}_{2000} + t \cdot \Delta\tilde{\omega}) - \lambda_{2000} + \tilde{\omega}_{2000}}{t}$$
$$= \frac{t \cdot \Delta\lambda - t \cdot \Delta\tilde{\omega}}{t} = \Delta\lambda - \Delta\tilde{\omega}$$

Под тази формула, n е в единици радиани за век, обаче на нас ни трябва безмерната ѝ стойност. Следователно, ще разделим n на 100 и 2π. Имплементираме формулата във функция `n`:

```
n <- function(dlambda, domega) {
  (dlambda - domega) / 100 / (2*pi)
}
```

Ще дефинираме стойността u използвайки вторият метод за решаване на уравнението на Кеплер:

$$u = l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(\cdots)))$$

Нуждаем се от 8 знака прецизност, затова ще използваме следното приближение:

$$u = l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(l)))))))$$

Дефинираме функция `u`, която пресмята стойността на u чрез рекурсивен алгоритъм:

```
u <- function(l, e, depth=8) {
  if (depth <= 0) { l }
  else            { l + e * sin(u(l, e, depth - 1)) }
}
```

Дължината на векторите r и v са част от решението. Дефинираме функция `length`, която приема 3-мерен вектор и връща евклидовата му дължина:

```
length <- function(vec) { sqrt(vec[1]^2 + vec[2]^2 + vec[3]^2) }
```

Вече сме готови да имплементираме кода, който обединява всичко това. Дефинираме функция `planetData`, която приема датата t във векове от началото на епохата, орбиталните елементи в началото на епохата и тяхното изменение. Функцията пресмята координатите x, y, z; радиуса $|r|$; покомпонентните скорости v_x, v_y, v_z и скоростта на планетата v:

```
planetData <- function(t, a2000, da, e2000, de, i2000, di, lambda2000, dlambda, omega2000,
    domega, theta2000, dtheta)
{
  a <- atDay(a2000, da, t)
  e <- atDay(e2000, de, t)
  i <- atDay(i2000, di, t)
  lambda <- atDay(lambda2000, dlambda, t)
  omega <- atDay(omega2000, domega, t)
  theta <- atDay(theta2000, dtheta, t)

  g <- g(omega, theta)
  l <- l(lambda, omega)
  n <- n(dlambda, domega)
  u <- u(l, e)

  r <- coordinates(theta, i, g, a, u, e)
  v <- speed(theta, i, g, a, u, e, n)

  c(r, length(r), v, length(v))
}
```

Финално дефинираме функцията `solarSystemAtBirth`, която извиква `planetData` за всяка планета с подадени константи:

```
solarSystemAtBirth <- function() {
  birthDate <- 0.023203285421
  rbind(
    planetData(birthDate,    # Меркурии
               0.38709927,    0.00000037, 0.20563593, 0.00001906, 0.12225995, -0.00010380,
               4.40259868, 2608.79030501, 1.35189358, 0.00280085, 0.84353100, -0.00218761),
    planetData(birthDate,    # Венера
               0.72333566,    0.00000390, 0.00677672, -0.00004107, 0.05924827, -0.00001377,
               3.17613446, 1021.32854958, 2.29689636,  0.00004683, 1.33831572, -0.00484668),
    planetData(birthDate,    # EM Bary
               1.00000261,   0.00000562, 0.01671123, -0.00004392, -0.00000027, -0.00022596,
               1.75343756, 628.30757790, 1.79660147,  0.00564219,  0.0,         0.0),
    planetData(birthDate,    # Марс
                1.52371034,   0.00001847,  0.09339410, 0.00007882, 0.03228321, -0.00014192,
               -0.07947238, 334.06130168, -0.41789517, 0.00775643, 0.86497713, -0.00510637),
    planetData(birthDate,    # Юпитер
               5.20288700, -0.00011607, 0.04838624, -0.00013253, 0.02276602, -0.00003206,
               0.60033114, 52.96631189, 0.25706047,  0.00370929, 1.75360053,  0.00357253),
    planetData(birthDate,    # Сатурн
               9.53667594, -0.00125060, 0.05386179, -0.00050991, 0.04338874,  0.00003379,
               0.87186604, 21.33653879, 1.61615531, -0.00731244, 1.98378354, -0.00503838),
    planetData(birthDate,    # Уран
               19.18916464, -0.00196176, 0.04725744, -0.00004397, 0.01348507, -0.00004240,
                5.46703627,  7.47842217, 2.98371499,  0.00712187, 1.29183904,  0.00074012),
    planetData(birthDate,    # Нептун
               30.06992276, 0.00026291, 0.00859048,  0.00005105, 0.03089309,  0.00000617,
               -0.96202600, 3.81283674, 0.78478315, -0.00562720, 2.30006864, -0.00008878)
  )
}
```

Извикваме функцията:

```
p(solarSystemAtBirth())
```

И получаваме следния резултат:

	x	y	z	$\|r\|$
Mercury	-0.2569892522	0.2164260053	0.0412666944	0.3385064720
Venus	-0.1166445847	0.7094677286	0.0164331060	0.7191804113
EM Bary	-0.7984835049	-0.6131132909	0.0000033801	1.0067193328
Mars	0.0101799533	1.5686596135	0.0326113752	1.5690315855
Jupiter	-1.8132518650	4.8899907784	0.0203482204	5.2153912785
Saturn	2.0761255995	8.7959937429	-0.2357956393	9.0407634088
Uranus	16.4964276183	-11.3052260072	-0.2558295226	20.0001426991
Neptune	18.9271242195	-23.3976888193	0.0456520201	30.0946832084

	v_x	v_y	v_z	$\|v\|$
Mercury	-1.3864619581	-1.1839190472	0.0305314033	1.8234234939
Venus	-1.1642070756	-0.1972100811	0.0645017151	1.1825524945
EM Bary	0.5928042970	-0.7969898554	0.0000043938	0.9932823185
Mars	-0.7825575318	0.0743119103	0.0207870540	0.7863527531
Jupiter	-0.4169723661	-0.1321091661	0.0098828616	0.4375116648
Saturn	-0.3329338533	0.0739849818	0.0119514504	0.3412646559
Uranus	0.1274263738	0.1777740834	-0.0009918592	0.2187283458
Neptune	0.1409109730	0.1159848250	-0.0056353427	0.1825928231

2. Решение Ще напишем програма на езика `R`, която намира елементите на Делоне и Поанкаре (от първи и втори вид) в деня на моето раждане. За целта се нуждаем и от масите на всички планети.

В допълнението към астрономическия алманах, глава 8, страници 19-20 [2], намираме:

GMs/GM1	6023600.0	$mass^{-1}$ for Mercury
GMs/GM2	408523.71	$mass^{-1}$ for Venus
GMs/GMB	328900.5614	$mass^{-1}$ for EM-Bary
GMs/GM4	3098708.0	$mass^{-1}$ for Mars
GMs/GM5	1047.3486	$mass^{-1}$ for Jupiter
GMs/GM6	3497.898	$mass^{-1}$ for Saturn
GMs/GM7	22902.98	$mass^{-1}$ for Uranus
GMs/GM8	19412.24	$mass^{-1}$ for Neptune

Ще се нуждаем от $\mu = \frac{m_{\text{планета}}}{m_{\text{слънце}}}$. Преобразуваме таблицата по формулата $\mu = \frac{1}{\text{GMs/GMX}}$:

	μ
Mercury	0.00000166013679527 19
Venus	0.0000024478383396645 4
EM Bary	0.0000030404326333266
Mars	0.0000032271514450539
Jupiter	0.0009547919384243221 4
Saturn	0.000285885980666102 9
Uranus	0.0000436624404335156 4
Neptune	0.0000515138902053549 7

Входните данни на програмата ще бъдат орбиталните елементи в началото на епохата, рожденната ми дата (в Юлиански векове от началото на епохата) и съотношенията на масите μ.

Първо ще разгледаме елементите на Делоне: L, G, Θ, l, g, θ.

Искаме да обновим величините от началото на епохата спрямо време t и да изкарваме на екрана стойности с 8 цифри прецизност. Копираме функциите `atDay` и `p` от 1 задача, като увеличаваме прецизността на 21 цифри след десетичната запетая:

```
atDay <- function(epochConstant, rate, t) { epochConstant + t * rate }
p <- function(x) { formatC(x, format="f", digits = 21) }
```

Величината θ е орбитален елемент. За l и g копираме функциите `l` и `g` от задача 1:

```
l <- function(lambda, omega) { lambda - omega }
g <- function(omega, theta) { omega - theta }
```

За величините L, G и Θ знаем следните формули по теорема:

$$L = m\sqrt{\gamma}\sqrt{a} \qquad G = L\sqrt{1-e^2} \qquad \Theta = G\cos i$$

Където a, e и i са орбитални елементи. За останалите величини (m и γ) имаме формулите:

$$\gamma = 1 + \mu \qquad m = \frac{\mu}{\gamma} = \frac{\mu}{1+\mu}$$

Имплементираме функции по формулите за всяка велична:

```
gamma <- function(mu) { 1 + mu }
m <- function(mu) { mu / (1 + mu) }
L <- function(m, gamma, a) {
  m * sqrt(gamma) * sqrt(a)
}
G <- function(L, e) {
  L * sqrt(1 - e^2)
}
Theta <- function(G, i) { G * cos(i) }
```

Обединявайки всичко, получаваме следната функция за намиране на елементите на Делоне по подадени време t, съотношение на маси μ, орбитални елементи в началото на епохата и тяхното изменение за век:

```
delaunay <- function(t, mu, a2000, da, e2000, de, i2000, di, lambda2000, dlambda, omega2000,
    domega, theta2000, dtheta) {
  a <- atDay(a2000, da, t)
  e <- atDay(e2000, de, t)
  i <- atDay(i2000, di, t)
  lambda <- atDay(lambda2000, dlambda, t)
  omega <- atDay(omega2000, domega, t)
  theta <- atDay(theta2000, dtheta, t)

  m <- m(mu)
  gamma <- gamma(mu)

  L <- L(m, gamma, a)
  G <- G(L, e)
  Theta <- Theta(G, i)
  l <- l(lambda, omega)
  g <- g(omega, theta)

  c(L, G, Theta, l, g, theta)
}
```

Дефинираме функцията `delaunayAtBirth`, която връща всички елементи на Делоне за всички планети с подадени константи:

```
delaunayAtBirth <- function() {
  birthDate <- 0.023203285421
  rbind(
    delaunay(birthDate, 0.00000016601367952719,    # Меркурии
               0.38709927,    0.00000037, 0.20563593, 0.00001906, 0.12225995, -0.00010380,
               4.40259868, 2608.79030501, 1.35189358, 0.00280085, 0.84353100, -0.00218761),
    delaunay(birthDate, 0.00000244783833966454,    # Венера
               0.72333566,    0.00000390, 0.00677672, -0.00004107, 0.05924827, -0.00001377,
               3.17613446, 1021.32854958, 2.29689636,  0.00004683, 1.33831572, -0.00484668),
    delaunay(birthDate, 0.0000030404326333266,     # EM Bary
               1.00000261,   0.00000562, 0.01671123, -0.00004392, -0.00000027, -0.00022596,
               1.75343756, 628.30757790, 1.79660147,  0.00564219,  0.0,         0.0),
    delaunay(birthDate, 0.00000032271514450539,    # Марс
                1.52371034,   0.00001847,  0.09339410, 0.00007882, 0.03228321, -0.00014192,
               -0.07947238, 334.06130168, -0.41789517, 0.00775643, 0.86497713, -0.00510637),
    delaunay(birthDate, 0.00095479193842432214,    # Юпитер
               5.20288700, -0.00011607, 0.04838624, -0.00013253, 0.02276602, -0.00003206,
               0.60033114, 52.96631189, 0.25706047,  0.00370929, 1.75360053,  0.00357253),
    delaunay(birthDate, 0.0002858859806661029,     # Сатурн
               9.53667594, -0.00125060, 0.05386179, -0.00050991, 0.04338874,  0.00003379,
               0.87186604, 21.33653879, 1.61615531, -0.00731244, 1.98378354, -0.00503838),
    delaunay(birthDate, 0.00004366244043351564,    # Уран
               19.18916464, -0.00196176, 0.04725744, -0.00004397, 0.01348507, -0.00004240,
                5.46703627,  7.47842217, 2.98371499,  0.00712187, 1.29183904,  0.00074012),
    delaunay(birthDate, 0.00005151389020535497,    # Нептун
               30.06992276, 0.00026291, 0.00859048,  0.00005105, 0.03089309,  0.00000617,
               -0.96202600, 3.81283674, 0.78478315, -0.00562720, 2.30006864, -0.00008878)
  )
}
```

Елементите на Поанкаре от първи вид са следната редица стойности по дефиниция:

$$L, \quad L-G, \quad G-\Theta, \quad l+g+\theta, \quad -g-\theta, \quad -\theta$$

Използвайки вече дефинираната `delaunayAtBirth`, можем итеративно да конвертираме всеки ред с елементи на Делоне към елементите на Поанкаре:

```
poincare1 <- function() {
  data <- delaunayAtBirth()
  result <- c()

  for (planet in 1:8) {
    L <- data[planet,1]; G <- data[planet,2]; Theta <- data[planet,3]
    l <- data[planet,4]; g <- data[planet,5]; theta <- data[planet,6]

    result <- rbind(
      result,
      c(L, L - G, G - Theta, l + g + theta, - g - theta, - theta)
    )
  }

  result
}
```

Елементите на Поанкаре от втори вид са следната редица стойности по дефиниция:

$$\begin{array}{ccc} L, & \xi = \sqrt{2(L-G)}\cos(g+\theta), & p = \sqrt{2(G-\Theta)}\cos(\theta), \\ l+g+\theta, & \eta = -\sqrt{2(L-G)}\sin(g+\theta), & q = -\sqrt{2(G-\Theta)}\sin(\theta) \end{array}$$

Напълно аналогично на `poincare1`, дефинираме `poincare2`:

```
poincare2 <- function() {
  data <- delaunayAtBirth()
  result <- c()

  for (planet in 1:8) {
    L <- data[planet,1]; G <- data[planet,2]; Theta <- data[planet,3]
    l <- data[planet,4]; g <- data[planet,5]; theta <- data[planet,6]

    result <- rbind(
      result,
      c(L,              sqrt(2*(L-G)) * cos(g + theta),  sqrt(2*(G-Theta)) * cos(theta),
        l + g + theta, -sqrt(2*(L-G)) * sin(g + theta), -sqrt(2*(G-Theta)) * sin(theta))
    )
  }

  result
}
```

Извикваме всяка от тези функции:

```
p(delaunayAtBirth())
p(poincare1())
p(poincare2())
```

И получаваме следните резултати:

Делоне	L	G	Θ
Mercury	0.000000103289225349226	0.000000101081776576878	0.000000100327287123918
Venus	0.000002081863094111913	0.000002081815303335347	0.000002078162453508473
EM Bary	0.000003040432177217194	0.000003040007655895516	0.000003040007655849318
Mars	0.000000398355249808993	0.000000396614057982431	0.000000396407441380291
Jupiter	0.002176825400448131106	0.002174276008944916582	0.002173712615531286918
Saturn	0.000882731532142888770	0.000881450722537746524	0.000880621120751847700
Uranus	0.000191260833739243018	0.000191047155475361307	0.000191029787586196811
Neptune	0.000282474574098807182	0.000282464148236046821	0.000282329368214719945

Делоне	l	g	θ
Mercury	63.583146161762698511666	0.508478328661191358862	0.843480240260780167461
Venus	24.577414857910831358367	0.958694185509240348608	1.338203261100615826251
EM Bary	14.535505234845919275699	1.796732387344969428256	0.000000000000000000000
Mars	8.089562546332686565620	-1.282573840780286689167	0.864858645439424700285
Jupiter	1.572177054766796810981	-1.496536886718685899211	1.753683424433265081177
Saturn	-0.249041797926948138553	-0.367680995663244303273	1.983666633030800374726
Uranus	2.656679993326903410633	1.692024027566735533412	1.291856213215605730937
Neptune	-1.658208241330383803103	-1.515413999540041523062	2.300066580012320560655

Поанкаре 1 вид	L	$L-G$	$G-\Theta$
Mercury	0.000000103289225349226	0.000000002207448772348	0.000000000754489452959
Venus	0.000002081863094111913	0.000000000047790776567	0.000000003652849826874
EM Bary	0.000003040432177217194	0.000000000424521321678	0.000000000000000046198
Mars	0.000003983552498089 93	0.000000001741191826562	0.000000000206616602140
Jupiter	0.002176825400448131106	0.000002549391503214524	0.000000563393413629664
Saturn	0.000882731532142888770	0.000001280809605142246	0.000000829601785898824
Uranus	0.000191260833739243018	0.000000213678263881711	0.000000017367889164495
Neptune	0.000282474574098807182	0.000000010425862760361	0.000000134780021326876

Поанкаре 1 вид	$l+g+\theta$	$-g-\theta$	$-\theta$
Mercury	64.935104730684670926166	-1.351958568921971526322	-0.843480240260780167461
Venus	26.874312304520689309584	-2.296897446609856174859	-1.338203261100615826251
EM Bary	16.332237622190888259865	-1.796732387344969428256	-0.000000000000000000000
Mars	7.671847350991824576738	0.417715195340861988882	-0.864858645439424700285
Jupiter	1.829323592481375992946	-0.257146537714579181966	-1.753683424433265081177
Saturn	1.366943839440607932900	-1.615985637367556071453	-1.983666633030800374726
Uranus	5.640560234109244674983	-2.983880240782341264349	-1.291856213215605730937
Neptune	-0.873555660858104765509	-0.784652580472279037593	-2.300066580012320560655

Поанкаре 2 вид	L	ξ	p
Mercury	0.000000103289225349226	0.000014424827544034668	0.000025827152487161843
Venus	0.000002081863094111913	-0.000006491251753606220	0.000019701746607823352
EM Bary	0.000003040432177217194	-0.000006527533112570199	0.000000009612286302040
Mars	0.000003983552498089 93	0.000053937790938604713	0.000013187832795805843
Jupiter	0.002176825400448131106	0.002183802985649161126	-0.000193054628745658468
Saturn	0.000882731532142888770	-0.000072301145995106139	-0.000516837678338016642
Uranus	0.000191260833739243018	-0.000645611834774382142	0.000051316013457963606
Neptune	0.000282474574098807182	0.000102183215085003621	-0.000345950770443006518

Поанкаре 2 вид	$l+g+\theta$	η	q
Mercury	64.935104730684670926166	-0.000064860017692109048	-0.000029016152403852770
Venus	26.874312304520689309584	-0.000007310622668714660	-0.000083171755027473018
EM Bary	16.332237622190888259865	-0.000028397780808021289	-0.000000000000000000000
Mars	7.671847350991824576738	0.000023939472880300536	-0.000015469785726697444
Jupiter	1.829323592481375992946	-0.000574271300256992776	-0.001043799184507826754
Saturn	1.366943839440607932900	-0.001598872025701959104	-0.001179865410141265995
Uranus	5.640560234109244674983	-0.000102673689729541247	-0.000179171552127487335
Neptune	-0.873555660858104765509	-0.000102030956457410801	-0.000387140939560313784

Източници

[1] Solar System Dynamics. (2025, Май 1). *Approximate Positions of the Planets.* Jet Propultion Laboratory, National Aeronautics and Space Administration. https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/approx_pos.html

[2] Williams, James G., & Standish, Myles E. (2006). Orbital Ephemerides of the Sun, Moon, and Planets. In Seidelmann, P. K. (Eds.), *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac.* https://www.researchgate.net/publication/232203657_Orbital_Ephemerides_of_the_Sun_Moon_and_Planets